# Kaos og Størmers problem

Kai T. Hansen
Niels Bohr Instituttet, København
Fysisk Institutt, Univ. i Oslo.

Kaos teori er, eller blir ofte oppfattet som, et helt nytt forskningsområde[1]. En kan derfor ha behov for å trekke linjer tilbake i tiden og identifisere hva som er nytt og hva som er en gjentakelse av gamle ideer.

*Størmers problem*[2] er et system som fortjener en renessanse i denne sammenhengen; det tilhører en viktig disiplin i norsk fysisk historie, nordlys forskningen, og har alt vi forlanger av et moderne kaotisk system. Det har riktignok ikke spilt en framtredende rolle ved framveksten av kaos-teori, men har vært et av de problemene som har ligget i bakgrunnen og ventet på bedre tider. Av interesse for norsk fysikk historie er det også at Størmers arbeid antakelig var verdens første beregninger av kaotiske baner[3].

Det første man fasineres av i kaos-teorien er de spektakulære datamaskin bildene av fraktaler. Når nyhetens interesse avtar er det det generelle i den geometriske strukturen i ulike problemer som fanger interessen. I Hamiltonske systemer har vi KAM-kurver som brytes ned når en parameter endres og et spredningssystem vil alltid ha en struktur som inkluderer en Cantor mengde. I dissipative systemer er forgreinings diagrammet med Feigenbaums skalering gyldig for en stor klasse systemer. Vi tar her for oss Størmers problem og viser at de generelle resultatene for Hamiltonsk kaos kan anvendes på dette interessante problemet.

Det mest interessante i norsk fysikk forskning omkring århundreskiftet var kanskje nordlysforskningen med Kristian Birkelands (1867-1917) eksperimenter og Carl Størmers (1874-1957) beregninger av en enkel ladd partikkels bevegelse i et magnetisk dipolfelt. I 1903 hadde Størmer en samtale med Birkeland om Birkelands eksperimenter med katodestråler i magnetiske felt. Dette førte til et livslangt prosjekt for Størmer der han ville berekne matematisk elektronenes bevegelse i jordas magnetfelt. Den modellen han satte opp var en enkelt ladd partikkel som beveger seg i et felt fra en magnetisk dipol. Poincaré hadde da alt løst problemet med en partikkel i et magnetisk monopol felt og vist at dette har analytiske løsninger og kan forklare aspekter av Birkelands eksperimenter[4]. I denne sammenhengen er dette interessant ettersom Poincaré er den som moderne kaos-teori skylder mest til. Poincaré viste at 3 legeme problemet som helt fra

Newtons tid hadde vært uløst, ikke hadde en generell analytisk løsning, han definerte diskret dynamikk utledet fra en kontinuerlig strøm med det vi nå kaller en Poincaré avbildning, han diskuterte det vi i moderne språkbruk kaller stabile og ustabile mangfoldigheter og han forstod også den sentrale plass periodiske baner har i beskrivelsen av et kaotisk system.

Størmer klarte å redusere det tredimensjonale problemet i rommet til et problem med to frihetsgrader

$$H = \frac{1}{2}(p_\rho^2 + p_z^2) + \frac{1}{2}(\frac{1}{\rho} - \frac{\rho}{r^3})^2 \tag{1}$$

hvor $\rho, \phi, z$ er sylindriske koordinater omkring magneten og $r$ er avstanden til origo. Størmers tegning av dette potensialet $V(\rho, z) = 1/2(1/\rho - \rho/r^3)^2 = 1/2(1/\rho - \rho/(\rho^2 + z^2)^{3/2})^2$ er vist i figur 1. En tredimensional tegning av det samme potensialet er vist i figur 2. Størmer fant at dette problemet måtte løses numerisk og før datamaskinens tid krevde dette mye arbeid og mange studenter og assistenter. Vi våger her påstanden at dette er *verdens første numeriske beregning av kaotiske baner.* Den grafiske framstillingen av en tredimensonal bane ble gjort med ståltråd som i figur 3. Dette var resultatet av et stort bereknings arbeid, men kan i dag naturligvis gjøres i løpet av sekunder på en datamaskin. Hva vi også har i dag er en teori med nye begreper som gir oss en dypere forståelse av de problemene Størmer møtte og viser oss at Størmers problem er et eksempel på den store klassen av problemer som nå kalles kaotiske systemer.

## Bundne baner

To sentrale begreper i kaos teorien gir oss verktøy for å forstå noen egenskaper i Størmers problem. Det første er KAM teorien[5] og det andre er Cantor mengder eller fraktaler[6, 7]. KAM teorien ble utviklet av Kolmogorov, Arnold og Moser i 1960-åra og sier at et integrabelt system med en perturbation som kan gi kaos, fortsatt har en stor grad av regulær struktur så lenge perturbationen er tilstrekkelig liten. For Størmers problem er det integrable systemet likning (1) med energien $H = E = 0$. Den eneste løsning av interesse for $E = 0$ er banen

$$r^3 = \rho^2 \tag{2}$$

det elektronet beveger seg ut fra den ene magnetiske polen, krysser ekvatorplanet og forsvinner så inn i den andre polen. En liten perturbation er i Størmers problem et valg av en energi litt større enn null. Uten KAM teori ville systemet ha besøkt alle punkter i faserommet som er energetisk tilgjengelig. Størmer viste at ut fra energi betraktninger ville elektronet være fanget i et område i nærheten av magneten. Så lenge energien er tilstrekkelig liten vil det imidlertid eksistere KAM-kurver (sirkler) som hindrer den ladde partikkelen i å besøke alle punkter i faserommet som den gitte energien tillater. Det ble vist av M. Braun i 1970[8] at KAM teorien gjelder for perturbasjoner av banen (2).

Figure 1: Størmers tegning av potensialet (1) for en ladd partikkel omkring en magnetisk dipol [2]. I notasjonen brukt i teksten er den horisontale aksen $\rho$ og den vertikale aksen $z$.

Figure 2: Potensialet i (1) tegnet som en flate over planet $(\rho, z)$.

Figure 3: Størmers tredimensjonale framstilling av en ladd partikkels bane omkring en magnetisk dipol fra 1907 [2]. Berekningen av denne banen tok mer enn 100 timer.

Figure 4: Poincaré avbildning av fire ulike baner for energien $E = 0.001$.

Vi kan lage en Poincaré avbildning av Størmers problem ved å velge å tegne punktet $(\rho, \dot{\rho})$ hver gang banen passerer $z = 0$ med $\dot{z} > 0$, dvs når partikkelen krysser ekvator planet og beveger seg mot nord. Figur 4 viser Poincaré avbildningen for fire forskjellige startpunkter med samme energi $E = 0.001$. Vi ser at en bane alltid krysser planet $(\rho, \dot{\rho})$ på en (topologisk) sirkel. Fire ulike baner gir dermed fire ulike KAM-sirkler og en partikkel kan ikke hoppe fra en sirkel til en annen sirkel selv om det energetisk sett ikke er noe til hinder for dette. Banen til disse fire startpunktene er tegnet i rommet $(\rho, z)$ i figurene 5 a), b), c) og d), og vi ser at en KAM-sirkel betyr en bane som alltid vender i samme avstand fra nord- og sydpolen. Her har vi en enkel fysisk tolkning av KAM teorien for dette systemet: For tilstrekkelig liten energi vil en partikkel gå fram og tilbake mellom nord- og sydpolen og alltid vende i samme avstand til polen selv om systemet ikke er integrabelt. Vi ser fra figurene at en liten sirkel i Poincaré avbildningen er en bane som kommer nær den magnetiske polen før den vender. Sentret i sirklene er den banen som fører helt inn til dipolen.

Så er neste spørsmål hva som skjer når energien ikke lenger er tilstrekkelig liten. Den generelle teorien for kaotiske systemer forteller oss at imellom KAM-sirklene finnes kaotiske områder som øker i størrelse og ødelegger KAM-sirklene når perturbasjonen øker. I Størmer problemet betyr det at for tilstrekkelig store energier vil ikke lenger partikkelen vende i samme avstand fra polene hver gang den vender.

Det vil generelt ikke være slik at alle KAM sirkler ødelegges samtidig. Avhengig av "hvor irrationelt" vindingstallet er for den enkelte KAM sirkel, vil de ødelegges for ulike størrelser av perturbationen. Vi kan derfor ha både kaotiske

Figure 5: De fire regulære banene for en ladd partikkel med energi $E = 0.001$ i figur 4. Startpunktet er $\dot{\rho} = 0$, $z = 0$ og a) $\rho = 1.01$ b) $\rho = 1.02$ c) $\rho = 1.03$ d) $\rho = 1.04$.

Figure 6: Poincaré avbildning av to ulike baner for energien $E = 0.0041$.

baner og regulære baner med samme energi. De forskjellige banene vil alltid være i ulike deler av faserommer og dermed i ulike områder i Poincaré avbildningen. Figur 6 viser Poincaré avbildningen av to baner for energien $E = 0.0041$ med startpunkter $\rho_0 = 1.08$ og $\rho_0 = 1.11$. Den første banen gir en mengde punkter spredd utover en begrenset del av planet, mens den andre banen gir punkter på en kurve (sirkel) som omgir punktene fra den andre banen. I figur 7 a) og b) er banene tegnet i $(\rho, z)$–planet og vi ser umiddelbart hvorfor det er naturlig å kalle den første banen kaotisk og den andre banen regulær. I figur 7 a) vender banen i forskjellig avstand fra polene hver gang, mens i figur 7 b) vender banen alltid i samme avstand. Den kaotiske banen vil komme vilkårlig tett på magneten og den eneste måten å finne ut når den vender er å berekne banen numerisk. Dette er det typiske kaotiske systemet: De fleste startpunkter gir en kaotisk bane mens noen startpunkter gir en regulær bane. Når vi lar energien bli større vil mer og mer av faserommet bli okkupert av kaotiske baner. Det finnes imidlertid ingen teori som sikrer at vi bare har kaotiske baner. Generelt er et kaotisk system alltid en blanding av kaotiske og regulære baner.

## Sprednings system

Fraktaler kan man diskutere i forbindelse med KAM teori, men en mer direkte illustrasjon av en fraktal får vi ved å studere Størmers problem for noe større energier. Vi vil nå se på partikler med så stor energi ($E > 1/32$) at de ikke er bundet til å være i nærheten av dipolen til evig tid, men kan slippe vekk omkring sadelpunktet ($\rho = 2, z = 0$) i figur 1.

Figure 7: De to banene for en ladd partikkel med energi $E = 0.0041$ i figur 6. Startpunktet er $\dot{\rho} = 0$, $z = 0$ og a) $\rho = 1.08$ b) $\rho = 1.11$.

Figur 8 viser banen for enkelte partikler som starter utenfor sadelpunktet bereknet av Størmer for energien $E = 0.10662$. Her er fire baner som starter med $\rho = 3.5$ og horisontalt mot dipolen, dvs. $\dot{z} = 0$ og med fire ulike verdier av avstanden til ekvatorplanet $z$. Verdien av $\dot{\rho}$ følger fra de fire oppgitte verdiene. Den banen partikkelen følger før den til slutt forsvinner ut igjen varierer mye med startpunktet. Denne variasjonen av banen med startpunktet er det vi er interessert i å studere.

Om vi velger en energi mindre en ca 0.08 men større en $1/32 = 0.03125$ vil banens avhengighet av startpunktet gi en fraktal [11]. Vi kan illustrere dette ved å starte baner ved $\rho_0 = 3.5$, $\dot{z} = 0$ og en verdi $z_0$ og så finne verdien $z_1$ når partikkelen returnerer ut igjen til $\rho_0 = 3.5$. Figur 9 viser $z_1$ som funksjon av $z_0$ for energien $E = 0.05$. Figurene 9 b), c) og d) er forsørrelser av $z_0$ aksen i figur 9 a) og i figur 9 d) varierer $z_0$ i et intervall på $10^{-7}$. Vi ser at i alle figurene har vi samme type struktur; intervaller der $z_1$ er en glatt funksjon av $z_0$ avbrutt av en mengde singulære punkter. Denne strukturen er uavhengig av hvilken skala vi ser på. Hvis vi glemmer å skrive $z_0$ verdiene på $x$-aksen er det umulig å gjette om $z_0$ variere i et intervall på 1 eller $10^{-10}$.

Det er de singulære punktene som utgjør en Cantor mengde i dette systemet. De singulære punktene er de banene som blir fanget i systemet og aldri slipper ut. Hvis vi ser på tiden det tar før partikkelen kommer ut igjen som funksjon av $z_0$ har tiden en liknende fraktal struktur som $z_1$ dertiden går mot $\infty$ for alle singulære punkter.

Vi kan kvalitativt forstå dette systemet om vi tenker oss at den ladde partikke-

Figure 8: Størmers beregning av noen baner som kommer inn med energi $E = 0.10662$. [2]

len er en kule som triller i et landskap gitt av potensialet $V$. For en passende energi vil kulen se tre "fjell": ett i retning av dipolen og ett på hver side av sadelpunktet. Vi kan så forenkle dette til en liten biljard kule som triller på et biljard bord og som støter mot tre store sylindere som står fast på biljardbordet i hvert sitt hjørne av en likesidet trekant. Vi tar så vekk kantene på bordet slik at kullen faller ned på gulvet om den triller ut til kanten. Dette systemet kalles 3 disk systemet og er mye studert i kaosforskningen.

I figur 10 a) ser vi 3 disk systemet og baner fra et punkt på end disk (en sylinder eller sirkelskive). Når vi varierer vinkelen på den utgående banen vil vi for endel vinkler treffe en av de andre to diskene. Vi ser at det er to intervaller av vinkler som fører til at kulen kolliderer med en ny disk og disse intervallene er illustrert med to linjer øverst i figur 10 b). Av de finklene som fører til en kollisjon er det noen vinkler der kulen kolliderer en gang til med en disk. Dette er to mindre intervaller inne i hver av de to opprinnelige intervallene. Disse fire intervallene er illustrert i den andre linja i figur 10 b). Om vi finner de vinklene som fører til at kula kollidrer minst tre ganger med en disk får vi 8 intervaller som i den tredje linja i figur 10 b). Når vi gjentar dette uendelig mange ganger får vi de vinklene som fører til at kula vil kollidere med disker for all framtid og dette er de singulære punktene vi er interessert i. I dette eksemplet får vi en eksakt binær Cantor mengde som er det enkleste eksemplet på en fraktal. Denne Cantor mengden er sjølvsimilær og uansett hvor mye vi forstørrer den vil vi se den samme strukturen.

Dette 3 disk systemet kan studeres på datamaskina, klassiske eksperimenter

Figure 9: Koordinaten $z_1$ som banen har når den krysser linja $\rho = 3.5$ på vei vekk fra dipolen som funksjon av startpunktet $z_0$. Alle banene starter med $\rho_0 = 3.5$, $\dot{z}_0 = 0$ og $E = 0.05$ i retning mot dipolen.

Figure 10: Biljard systemet med 3 disker. I b) er det skissert opp construksjonen av en Cantor mengde som er de vinklene i a) slik at en partikkel aldri slipper vekk fra systemet.

kan gjøres med en laser og speil eller med et flipperspill, og kvantemekaniske eksperimenter utføres med halvledere og mikrobølger.

Hvis energien er større enn ca 0.08 er systemet så åpent at partikkelen ikke lenger ser tre fjell som den kan bevege seg fram og tilbake imellom, og vi har ikke noen fraktal struktur i spredningen. Det er fortsatt en ganske komplisert struktur, men vi vil ikke lenger kalle det et kaotisk system.

Dette eksemplet viser litt av hvordan moderne kaos teori kan gi ny forståelse av et gammelt problem. Kaos teori blir oftest presentert ved å beskrive en modell som er valgt mer på grunn av matematisk enkelhet enn på grunn av fysisk intuisjon. Her ser vi at når man først behersker teknikkene for de enkle kaotiske systemene er det relativt enkelt å beskrive et mer kompleks system.

For å studere det opprinnelige nordlys problemet er Størmers formulering litt for enkel. På grunn av solvinden er magnetfeltet ikke symmetrisk om jorden og de ladde partiklene beveger seg i plasma og ikke i vakum. Noe mer realistiske modeller[12] gir kvalitativt de samme resultater som vi har sett for Størmers problem; de bundne banene er en blanding av kaostiske og regulære baner. Metodene fra kaos forskningen har gitt bedre forståelse av partikkelbevegelsen omkring jorden, men det gjenstår å beregne målbare resultater fra realistiske kaostiske modeller og sammenlikne disse med observasjoner[12].

# References


[1] James Gleick, *Chaos: making a new science.* (Viking, New York. 1987)

[2] Carl Størmer, *Comptes Rendus, Paris* **142**, p 1580; **143**, p 140, p 408 and 460. *Archiv for Mathematatik og naturvidenskab, Christiania*, **B 28, nr. 2**, 3(1906). *Arch. Sci. phus. nat., Genève* 4 period,**24**, p 5, p 113, p 221, p 317 (1907). *The Polar Aurora* (Oxford Univerity Press, 1955).

[3] E. Atlee Jackson, privat samtale.

[4] H. Poincaré, "Remarques sur une expérience de M. Birkeland" *C/ R. Acad. Sci.,* Paris, **123**, 930 (1896)

[5] A. J. Lichtenber and M. A. Lieberman *Regular and stocastic Motion* (Springer-Verlag, Heidelberg, 1983).

[6] Jens Feder *Fractals* (Plenum, New York. 1988)

[7] Jan Frøyland *Introduction to Chaos and Coherence* (Institute of Physics Publishing, Bristol 1992)

[8] M. Braun, *J. Differential Equations* **8**, 294 (1970).

[9] G. Contopoulos and L. Vlahos, *J. Math. Phys.* **16**, 1469 (1975).

[10] A. J. Dragt and J. M. Finn, *J. Geophysical Res.***81**, 2327 (1976).

[11] C. Jung and H.-J. Scholz, *J. Phys. A* **21**, 2301 (1988).

[12] P. B. Dusenbery, R. F. Martin and G. R. Burkhardt, *Chaos* **2**, 427 (1992).