Sumregler for Periodiske Trajektorier

Tilføjelser til mit Bachelorprojekt
Kim Hansen

11. Maj 1995

1 Omskrivning af sumregel til Fredholmdeterminant

Du skriver at der er en smartere måde at omskrive $T_{(-5)}$ til Fredholmdeterminant, det kan være at dette her virker.

Jeg starter med at klippe to af dine definitioner/formeler ud:
Define

$$\mathbf{B} := \begin{pmatrix} c^2 & 1 \\ -c^3 & -3c \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{S} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

and rewrite (10) as

$$T^{(n)}_{(-5)} = 32^n \, (1,0) \, (\mathbf{1} + \mathbf{B}^n + \mathbf{S}\mathbf{B}^n\mathbf{S}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Idet øverste venstre element i $\mathbf{B}^n + \mathbf{S}\mathbf{B}^n\mathbf{S}$ er sporet af $\mathbf{B}^n$ kan (2) med fordel omskrives til,

$$T^{(n)}_{(-5)} = 32^n \, (\mathbf{1} + \mathrm{Tr}\,\mathbf{B}^n) \, . \tag{3}$$

Dette giver Fredholmdeterminanten, ved anvendelse af determinanten på samme måde som du har gjort,

$$\begin{aligned} F_{(-5)}(z) &= \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} T^{(n)}_{(-5)}\right) \\ &= (1-32z)\exp\left(-\,\mathrm{Tr}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(32z)^n}{n}\mathbf{B}^n\right) \\ &= (1-32z)\det(1-32z\mathbf{B}) \\ &= (1-32z)\left(1-c(c-3)32z-2c^3(32z)^2\right) \, . \end{aligned} \tag{4}$$

idet $\exp(\mathrm{Tr}\,\mathbf{A}) = \det(\exp\mathbf{A})$.

2 Formodninger

Bemærk! Nu vælger jeg at definere min kvadratiske afblidning til at være $f(x) = x^2 - c$, hvilket vil sige at jeg har skiftet fortegn på c.

I dette afsnit vil jeg ud fra en simpel antagelse beregne sumreglerne $T_{(-6)}$ og $T_{(-7)}$, og ud fra disse sumregler vil jeg finde Fredholmdeterminanterne, som jeg sammenligner med [2].

Min antagelse er, at jeg kan finde sumreglen ud fra sporet af det første led i rækkeudviklingen (7) fra mit bachelorprojekt [1].

2.1 Regel nr. 6

$$T^{(n)}_{(-6)} = \oint \frac{dx}{2\pi i}\frac{f^{n\prime}(x)^6}{x}\left(\frac{x^2}{f^n(x)^2}+\frac{x^4}{f^n(x)^4}\right)+64^n \tag{5}$$

Jeg piller det første led ud:

$$\begin{aligned} A^{(n)}_{(-6)} &= \oint \frac{dx}{2\pi i}\frac{x f^{n\prime}(x)^6}{f^n(x)^2} \\ &= \sum_{\xi\in\mathrm{zero}(f^n)} f^{n\prime}(\xi)^3\big(f^{n\prime}\xi+\xi f^{n\prime\prime}(\xi)\big) \\ &= 64(3c^2A^{(n-1)}_{(-6)}+B^{(n-1)}_{(-6)}) \end{aligned}$$

hvor

$$\begin{aligned} B^{(n)}_{(-6)} &= \sum_{\xi\in\mathrm{zero}(f^n)} \xi^2 f^{n\prime}(\xi)^3\big(3f^{n\prime}\xi+5\xi f^{n\prime\prime}(\xi)\big) \\ &= 64(4c^3A^{(n-1)}_{(-6)}+4cB^{(n-1)}_{(-6)}) \end{aligned}$$

Dette vil, hvis mine formodninger er rigtige give,

$$T^{(n)}_{(-6)} = 64^n\left(1+\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 3c^2 & 1 \\ 4c^3 & 4c \end{pmatrix}^n\right) \tag{6}$$

og Fredholmdeterminanten

$$\begin{aligned} F_{(-6)}(z) &= (1-2(32z))\det\left(\mathbf{1}-64z\begin{pmatrix} 3c^2 & 1 \\ 4c^3 & 4c \end{pmatrix}\right) \\ &= (1-2(32z))(1-2c(3c+4)32z+32c^3(32z)^2) \end{aligned}$$

hvilket er det samme som $G_5(32z,-c)$ fra [2].

2.2 Regel nr. 7

På samme måde kan sumregel nummer 7 findes:

$$\begin{aligned} T^{(n)}_{(-7)} &= 128^n\left(1+\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} c^3 & 3c & 0 \\ c^4 & 6c^2 & 1 \\ c^5 & 10c^3 & 5c \end{pmatrix}^n\right) \\ F_{(-7)}(x/64) &= (1-2z)(1-2c(c^2+6c+5)z+4c^3(3c^2+5c+20)z^2-64c^6z^3) \end{aligned}$$

hvilket også stemmer overens med resultaterne i [2].

3 De ulige sumregler

Hvordan man laver en ulige sumregel, beviset for at det passer kommer senere. Definer $m\times m$-maticen, hvor $\binom{n}{k}$ sættes til 0 hvis $k>n$,

$$\mathbf{B}_{(-2m-1)} = \begin{pmatrix} c^m & \binom{m}{2}c^{m-2} & \binom{m}{4}c^{m-4} & \cdots & \binom{m}{2m-2}c^{2-m} \\ c^{m+1} & \binom{m+1}{2}c^{m-1} & \binom{m+1}{4}c^{m-3} & \cdots & \binom{m+1}{2m-2}c^{3-m} \\ c^{m+2} & \binom{m+2}{2}c^{m} & \binom{m+2}{4}c^{m-2} & \cdots & \binom{m+2}{2m-2}c^{4-m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c^{2m-1} & \binom{2m-1}{2}c^{2m-3} & \binom{2m-1}{4}c^{2m-5} & \cdots & \binom{2m-1}{2m-2}c \end{pmatrix}, \tag{7}$$

så er sumreglen for $T_{(-2m-1)}$

$$T^{(n)}_{(-2m-1)} = 2^{(2m+1)n}(1 + \operatorname{Tr} \mathbf{B}^n_{(-2m-1)}) \tag{8}$$

og Fredholmdeterminanten bliver

$$F_{(-2m-1)}(z/2^m) = (1 - 2z)(\det(\mathbf{1} - 2z\mathbf{B}_{(-2m-1)})) \tag{9}$$

Lemma Før jeg viser at man kan finde sumreglerne på denne måde vil jeg skrive lidt om at skifte variabel i et kurveintegrale. Jeg ønsker at skifte integrationsvariabel fra x til $f(x)$ i integralet,

$$\oint_\gamma \frac{f'(x)dx}{2\pi i} h(f(x)), \tag{10}$$

hvor γ er en vej, en gang rundt om alle polerne for $h(f(x))f'(x)$ i positiv omløbsretning. Det jeg ønsker at omskrive integralet til er,

$$\oint_\gamma \frac{dy}{2\pi i}\, h(y), \tag{11}$$

hvor γ er den samme integrationsvej som før.

Da jeg ønsker at beholde integrationsvejen er (10) ikke lig (11), men det gælder at

$$\oint_\gamma \frac{f'(x)dx}{2\pi i} h(f(x)) = \oint_{f(\gamma)} \frac{dy}{2\pi i}\, h(y),$$

og da jeg ved at vælge γ stor nok kan sikrer mig at $f(\gamma)$ netop løber rundt om alle polerne to gange må (11) være dobbelt så stor som (10), eller

$$\oint_\gamma \frac{f'(x)dx}{2\pi i} h(f(x)) = 2 \oint_\gamma \frac{dy}{2\pi i}\, h(y). \tag{12}$$

Bevis for sumregler Det jeg skal bevise er at $2^{(2m+1)n} \operatorname{Tr} \mathbf{B}^n_{(-2m-1)}$ er lig $T^{(n)}_{(-2m-1)} - 2^{(2m+1)n}$. Jeg starter med at opskrive rækkeudviklingen af sumreglen hvor jeg har fjernet det sidste led, samt alle de led der bliver nul ifølge afnit 2.1 i [1],

$$\Gamma^{(n)}_{(-2m-1)} = \oint \frac{dx}{2\pi i} \frac{(f^{n\prime}(x))^m}{x} \left(\left(\frac{x}{f^n(x)}\right)^1 + \left(\frac{x}{f^n(x)}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{x}{f^n(x)}\right)^{2m-1} \right)$$

Jeg definerer nu:

$$A^{(n)}_{(-2m-1)}(r,s) = \oint \frac{dx}{2\pi i} \frac{x^{2(r-1)} f^{n\prime}(x)^{2m+1}}{f^n(x)^{2s-1}}, \tag{13}$$

og som det ses er $\Gamma^{(n)}_{(-2m-1)} = \sum_{i=1}^m A^{(n)}_{(-2m-1)}(i,i)'$, og ved anvendelse af Cauchys integraleformel fås $A^{(0)}_{(-2m-1)}(r,s) = \delta_{2(r-1)-2s+1,-1} = \delta_{r,s}$.

Mit mål er nu at udtrykke $A^{(n)}_{(-2m-1)}(r,s)$ vha. en sum bestående af led af formen $A^{(n-1)}_{(-2m-1)}(r,s)$.

$$A^{(n)}_{(-2m-1)}(r,s) \quad = \quad \oint \frac{dx}{2\pi i} \frac{x^{2(r-1)} f^{n\prime}(x)^{2m+1}}{f^n(x)^{2s-1}} \tag{14}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2^{2m} \oint \frac{f^{n\prime}(x)dx}{2\pi i} \frac{x^{2(m+r-1)} f^{n-1\prime}(f(x))^{2m+1}}{f^{n-1}(f(x))^{2s-1}} \\
&= 2^{2m+1} \oint \frac{dx}{2\pi i} \frac{(x+c)^{m+r-1} f^{n-1\prime}(x)^{2m+1}}{f^{n-1}(x)^{2s-1}} \\
&= 2^{2m+1} \sum_{j=0}^{m+r-1} \tbinom{m+r-1}{j} c^{m+r-1-j} \oint \frac{dx}{2\pi i} \frac{x^i f^{n-1\prime}(x)^{2m+1}}{f^{n-1}(x)^{2s-1}} \\
&= 2^{2m+1} \sum_{j=1}^{\frac{m+r+1}{2}} \binom{m+r-1}{2(j-1)} c^{m+r+1-2j} A^{(n-1)}_{(-2m-1)}(r,j)
\end{aligned}
$$

Faktoren foran $A^{(n-1)}_{(-2m-1)}(r,j)$ genkendes som værende elementet i j'te række og s'te søjle i $\mathbf{B}_{(-2m-1)}$, dette element kalder jeg for $B_{(-2m-1)}(j,s)$. Jeg kan udvide summen til at løbe til m idet leddene fra $\frac{m+r+1}{2}$ til m alle giver nul.

$$
A^{(n)}_{(-2m-1)}(r,s) = 2^{2m+1} \sum_{j=1}^{m} A^{(n-1)}_{(-2m-1)}(r,j) B_{(-2m-1)}(j,s) \tag{15}
$$

Dette gendkendes som matrix multiplikation, og ligningen kan omskrives til,

$$
\mathbf{A}^{(n)}_{(-2m-1)} = 2^{2m+1} \mathbf{A}^{(n-1)}_{(-2m-1)} \mathbf{B}_{(-2m-1)} \tag{16}
$$

og da $\mathbf{A}^{(0)}_{(-2m-1)} = \mathbf{1}$ er

$$
\mathbf{A}^{(n)}_{(-2m-1)} = 2^{(2m+1)n} \mathbf{B}^{n}_{(-2m-1)} \tag{17}
$$

Da $\Gamma^{(n)}_{(-2m-1)} = \mathrm{Tr}\, \mathbf{A}^{(n)}_{(-2m-1)}$ får man at sumreglerne og deres tilhørende Fredholmdeterminanter bliver som (8) og (9).

Jeg har beregnet $F_{(-13)}$, og den stemmer overens med G_{12} fra citeHV93.

4 De lige sumregler

Mangler...

References

[1] K. Hansen, *Sumregler for Periodiske Trajektorier*, Københavns Universitet (maj 1995).

[2] S. Hatjispyros, F. Vivaldi, "A family of rational zeta functions for the quadratic map", *Nonlinearity* (to be published).