Sumregler for Periodiske Trajektorier

Bachelorprojekt
Kim Hansen (with addition by P. Cvitanović)

2 May 1995

Resumé

(Though in Danish, this can be read in conjunction with ref. [1] or the "Sum Rules" chapter of ref. [4]. The new stuff is in sect. 3.2, sect. 3.3.)

Ved hjælp at kompleks funktionsteori findes en række sumregler for polynomier, herunder specielt den kvadratiske afbildning. Der beregnes Fredholm determinant og zeta funktion for en ny sumregel og så beskrives der kort hvordan sumreglerne er testet nummerisk.

Indhold

1 Indledning **1**
1.1 Komplekse integraler 2

2 Sumreglerne **2**
2.1 Nogle enkelte led 3
2.2 De generelle sumregler 4

3 Den kvadratiske afbildning **4**
3.1 Regel nr. 3 4
3.2 Regel nr. 4 5
3.3 Regel nr. 5 6

4 Fredholm determinanter og zeta funktioner **8**

5 Nummerisk test **8**

6 Konklusion **9**

1 Indledning

Mit mål med dette projekt er at beregne sumregler for periodiske trajektorier, ved at benytte sammenhængen mellem sumregler og komplekse kurveintegraler. Jeg vil først skrive lidt om denne sammenhæng, og vil derefter udlede en række sumregler på samme måde som det er gjort i ref. [1]. Jeg vil så fortsætte hvor [1] er stoppet, og vise to sumregler mere, for den ene sumregel beregner jeg også den Fredholm determinant og zeta funktion der er beskrevet i [1].

1.1 Komplekse integraler

Sumreglerne jeg senere skal beregne, summeres over de punkter der er fixpunkter for en funktion f, dvs. de punkter, der er nulpunkter for afbildningen $x \to f(x) - x$.

Da jeg også får brug for at omskrive summe, der summeres over nulpunkter, vælger jeg her at kigge på, hvordan en sum over nulpunkter, kan omformes til et integral.

Summen jeg kigger på er $\sum_{\xi \in \mathrm{zero}(f)} \frac{h(\xi)}{f'(\xi)}$, hvilket vil være summen over residuerne for funktionen $\frac{h(x)}{f(x)}$, når alle nulpunkterne for f er simple, og h er polfri. Ved at benytte Cauchys residuesætning [3], kan summen derfor omskrives til et integral, der integreres én gang i positiv omløbsretning, mod uret, omkring alle nulpunkterne for f. Det vil i resten af projektet være den integrationsvej, der benyttes ved udregning af alle komplekse kurveintegraler.

$$\sum_{\xi \in \mathrm{zero}(f)} \frac{h(\xi)}{f'(\xi)} = \oint \frac{dx}{2\pi i} \frac{h(x)}{f(x)} \tag{1}$$

Det er denne formel, jeg gentagende gange i projektet vil bruge til at omskrive en sum til et integral eller omvendt, men her skal man huske, at den kun gælder når f har simple nulpunkter. Hvis alle nulpunkterne for f er af samme orden j, og hvis de ikke falder sammen med nulpunkter for h, der er polfri, kan integralet omskrives til

$$\oint \frac{dx}{2\pi i} \frac{h(x)}{f(x)} = \sum_{\xi \in \mathrm{zero}(f)} \lim_{x \to \xi} \left(\frac{d^{j-1}}{dx^{j-1}} \frac{(x-\xi)^j h(x)}{(j-1)! f(x)} \right). \tag{2}$$

Denne formel kan ved anvendelse af en Taylorrække, omskrives til (1) i tilfældet $j = 1$, men for $j > 1$ er formelen ikke særlig elegant. Jeg får senere brug for at kende residuet af $\frac{h(x)}{f(x)^2}$, hvor $f(x)$ kun har simple nulpunkter, hvilket medfører at alle nulpunkterne for $f(x)^2$ vil være at 2. orden. Beregningen af dette residue, gøres ved først at udføre differentieringen i (2), og ved derefter at udskifte f med dens 2. ordens Taylorrække beregnet omkring ξ, fås

$$\oint \frac{dx}{2\pi i} \frac{h(x)}{f(x)^2} = \sum_{\xi \in \mathrm{zero}(f)} \left(\frac{h'(\xi)}{f'(\xi)^2} - \frac{h(\xi) f''(\xi)}{f'(\xi)^3} \right). \tag{3}$$

2 Sumreglerne

Mit mål er nu at benytte denne sammenhæng mellem komplekse kurveintegraler og sumregler, til at beregne en række sumregler af formen

$$T_{(-m)} = \sum_{\xi \in \mathrm{fix}(f)} \frac{f'(\xi)^m}{f'(\xi) - 1}, \tag{4}$$

hvor f er et polynomium af grad $N \geq 2$, og $m = 0, 1, 2, \ldots$. Mængden $\mathrm{fix}(f)$ er fixpunkterne for afbildningen f, dvs. løsningerne til ligningen $f(x) - x = 0$. Her er det vigtigt at huske, at der er tale om alle løsningerne, også de komplekse.

Summen (4) kan, ved anvendelse af (1), omskrives til integralet

$$T_{(-m)} = \oint \frac{dx}{2\pi i} \frac{f'(x)^m}{f(x) - x}. \tag{5}$$

Da graden af f er større eller lig med 2, vil $|x/f(x)| < 1$ for tilstrækkeligt store $|x|$, og ved at vælge integrations vejen stor nok, kan integranten rækkeudvikles til

$$\oint \frac{dx}{2\pi i} \frac{f'(x)^m}{f(x) - x} \quad = \quad \oint \frac{dx}{2\pi i} \frac{(f'(x))^m}{x} \frac{x/f(x)}{1 - x/f(x)}$$

$$= \oint \frac{dx}{2\pi i} \frac{f'(x)^m}{x} \left(\frac{x}{f(x)} + \left(\frac{x}{f(x)} \right)^2 + \cdots \right).$$

Jeg vurderer nu ordenen af det enkelte led i summen for $x \to \infty$, idet jeg med den vurdering kan vise at størstedelen af leddene er nul.

$$\begin{aligned} \frac{f'(x)^m}{x} \left(\frac{x}{f(x)} \right)^j &= \frac{N^m x^{(N-1)m}(1 + O(x^{-1}))}{x} \frac{x^j}{x^{Nj}(1 + O(x^{-1}))} \\ &= N^m x^{(N-1)(m-j)-1} \frac{1 + O(x^{-1})}{1 + O(x^{-1})} \end{aligned} \tag{6}$$

Af vurderingen fremgår det, at leddenen af potens $j > m$ er af orden mindst $O(x^{-N})$, og ved at udvide integrationsvejen til ∞, kan man se at de ikke bidrager til integralet.

$$T_{(-m)} = \oint \frac{dx}{2\pi i} \frac{(f'(x))^m}{x} \left(\frac{x}{f(x)} + \left(\frac{x}{f(x)} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{x}{f(x)} \right)^m \right) \tag{7}$$

Ved hjælp af denne rækkeudvikling kan $T_{(-m)}$ nu beregnes, jeg kan dog kun beregne $T_{(0)}$, $T_{(-1)}$ og $T_{(-2)}$ uden at kende funktionen, men inden jeg gør dette vil, jeg først beregne nogle enkelte led i rækkeudviklingen.

2.1 Nogle enkelte led

Det sidste led i summen (7) kan beregnes for alle m, idet man ved at benytte vurderingen (6) for $j = m$, får

$$\oint \frac{dx}{2\pi i} \frac{(f'(x))^m}{x} \left(\frac{x}{f(x)} \right)^m = N^m \oint \frac{dx}{2\pi i} x^{-1} \frac{1 + O(x^{-1})}{1 + O(x^{-1})} = N^m. \tag{8}$$

Det er ikke muligt på samme måde at finde en generel formel for de andre led i summen, men hvis man antager at f er et lige polynomium, bliver den halvdel af leddene, hvor $m - j$ er ulige, nul.

For at vise det, omskriver jeg først integralet til en sum over nulpunkterne for f, og hvis alle nulpunkterne for f er af 1. orden, bliver integralet ifølge (2),

$$\oint \frac{dx}{2\pi i} \frac{(f'(x))^m}{x} \left(\frac{x}{f(x)} \right)^j = \sum_{\xi \in \mathrm{zero}(f)} \lim_{x \to \xi} \left(\frac{d^{j-1}}{dx^{j-1}} \frac{(x - \xi)^j f'(x)^m x^{j-1}}{(j-1)! f(x)^j} \right).$$

Her skal man så huske at når f er lige vil $-\xi$ være nulpunkt for f hvis ξ er det, og det betyder at det er nok at vise at residuet er en ulige funktion, fordi så vil leddene gå ud parvis. Til at vise dette benytter jeg at er funktion af x skifter mellem at være lige og ulige ved differentiering efter x og ved multiplikation med x, derfor kan jeg, når jeg kun bekymrer mig om funktionen er lige eller ulige, lade x gå ud mod $\frac{d}{dx}$. Det giver mig følgende udtryk for residuet

$$\lim_{x \to \xi} \left(\frac{(x - \xi)^j f'(x)^m}{f(x)^j} \right) = f'(\xi)^{m-j},$$

der, når $f(x)$ er lige, vil være ulige hvis $m - j$ er ulige.

2.2 De generelle sumregler

For at beregne $T_{(0)}$ har jeg ikke brug for rækkeudviklingen, men kan kigger direkte på integralet (5). For $|x| \to \infty$ fås

$$T_{(0)} = \oint \frac{dx}{2\pi i} \frac{1}{f(x) - x} = \oint \frac{dx}{2\pi i} \frac{1}{x^N(1 + O(x^{-1}))} = 0.$$

Altså er $T_{(0)} = 0$ for alle polynomier af grad 2 eller derover.

For at finde $T_{(-1)}$ benytter jeg at der kun er et led, og det er det sidste, så jeg får fra (8) at $T_{(-1)} = N^1 = N$.

$T_{(-2)}$ består af to led, det sidste fås fra (8), og giver N^2. Det første led kan jeg ikke beregne generelt, men det vil, som vist i forrige afsnit, give nul når f er et lige polynomium. Det give at $T_{(-2)} = N^2$ for lige polynomier.

Det er ikke muligt at bestemme $T_{(-3)}$ eller nogen af de efterfølgende sumregler for generelle polymonier, men for den kvadratiske afbildning er det muligt af finde flere regler.

3 Den kvadratiske afbildning

For at udlede flere sumregler må jeg nu kigge på en specifik funktion, og her kigger jeg så på den mest simple afbildning, hvor sumreglerne kan bruges, nemlig den kvadratiske afbildning og dens periodiske punkter. Den form for kvadratisk afbildning jeg vælger er $f(x) = x^2 + c$.

De første tre sumregler for den kvadratiske afbildning er ligetil, idet den kvadratiske afbildning er lige, og graden af f^n er 2^n.

$$\begin{aligned} T_{(0)} &= 0 \\ T_{(-1)} &= 2^n \\ T_{(-2)} &= 4^n \end{aligned}$$

Disse sumregler er generelle, men der er flere sumregler, og de resultater der kommer nu, gælder kun for den kvadratiske afbildning.

3.1 Regel nr. 3

For at finde $T_{(-3)}$ skal jeg beregne tre led fra integralet (7), heraf har jeg allerede fundet to af leddene, nemlig det andet led, der giver nul, fordi f^n er lige, og det tredie, der er det sidste, og derfor giver $(2^n)^3 = 8^n$.

$$T_{(-3)} = \oint \frac{dx}{2\pi i} \frac{f^{n\prime}(x)^3}{f^n(x)} + 0 + 8^n$$

Som det ses, er det led jeg mangler at beregne det første, og det kalder jeg nu Γ_n og omskriver til en sum over nulpunkterne for f^n, ved anvendelse af (1).

$$\Gamma_n \equiv \oint \frac{dx}{2\pi i} \frac{f^{n\prime}(x)^3}{f^n(x)} = \sum_{\xi \in \mathrm{zero}(f^n)} f^{n\prime}(\xi)^2$$

Jeg anvender nu, at $f^{n\prime}(x) = \frac{d}{dx} f^{n-1}(f(x)) = f^{n-1\prime}(f(x)) f'(x)$, samt at $f'(x) = 2x$, og at $x^2 = f(x) - c$, til at omskrive Γ_n til

$$\Gamma_n = 4 \sum_{\xi \in \mathrm{zero}(f^n)} f^{n-1\prime}(f(\xi))^2 (f(\xi) - c). \tag{9}$$

Nu bemærker jeg, at hver gang man finder to nulpunkter, ξ og $-\xi$, for f^n, finder man et nulpunkt $f(\xi) = f(-\xi)$ for f^{n-1}. Det betyder at hvis man har en sum som (9) der summeres over $\xi \in \mathrm{zero}(f^n)$ men hvor ξ i summen kun bruges som $f(\xi)$ kan summen ændres til at summere over $\xi \in \mathrm{zero}(f^{n-1})$. Dette gøres ved at bytte $f(\xi)$ ud med ξ og multiplicere hele summen med 2 for at tage højde for at f^n har dobbelt så mange nulpunkter som f^{n-1}, og med den omskrivning bliver Γ_n

$$\begin{aligned}\Gamma_n &= 8 \sum_{\xi\in\mathrm{zero}(f^{n-1})} {f^{n-1}}'(\xi)^2(\xi - c) \\ &= -8c \sum_{\xi\in\mathrm{zero}(f^{n-1})} {f^{n-1}}'(\xi)^2 = -8c\,\Gamma_{n-1}.\end{aligned}$$

Her er brugt at ${f^{n-1}}'(\xi)^2\xi$ er en ulige funktion, så leddene derfor går ud parvis, og summen over den funktion giver derfor nul.

Ved at beregne Γ_1 til $-8c$ ses ved induktion efter n, at $\Gamma_n = (-8c)^n$. Det giver sumreglen $T_{(-3)} = 8^n + (-8c)^n$.

Alle de sumregler jeg har vist indtil nu, er vist i [1], men de næste to sumregler er nogen jeg selv har fundet.

3.2 Regel nr. 4

I regel 4 er der 4 led i integralet (7), heraf er 2 af leddene nul, og ét er beregnet, hvilket giver sumreglen

$$T_{(-4)} = 0 + \oint \frac{dx}{2\pi i}\frac{x\,{f^n}'(x)^4}{f^n(x)^2} + 0 + 16^n.$$

Lige som ved beregning af $T_{(-3)}$ tager jeg integralet, ud og kigger på det seperat. I dette tilfælde kalder jeg integralet for Δ_n.

$$\Delta_n \equiv \oint \frac{dx}{2\pi i}\frac{x\,{f^n}'(x)^4}{f^n(x)^2}$$

Her er det dog ikke nær så simpelt som før at omskrive integralet til en sum, idet alle integrantens poler er af anden orden, men ved anvendelese af (3) fås,

$$\Delta = \sum_{\xi\in\mathrm{zero}(f^n)} \big({f^n}'(\xi)^2 + 3\,\xi\,{f^n}'(\xi)\,{f^n}''(\xi)\big).$$

Her kan man se at Δ_n indeholder Γ_n, men det kan i dette tilfælde ikke betale sig at splitte summen op i to led. I stedet kan summen omskrives lige som ved udledningen af $T_{(-3)}$. Her bruger jeg udover de formler jeg brugte ved udledningen af $T_{(-3)}$, at ${f^n}''(x) = {f^{n-1}}''(f(x))f'(x)^2 + 2{f^{n-1}}'(f(x))$ idet $f''(x) = 2$ for alle x.

$$\begin{aligned}\Delta_n &= \sum_{\xi\in\mathrm{zero}(f^n)} \Big({f^{n-1}}'(f(\xi))^2(2\xi)^2 \\ &\qquad + 3\,\xi\,{f^{n-1}}'(f(\xi))2\,\xi\big({f^{n-1}}''(f(\xi))(2\xi)^2 + 2{f^{n-1}}'(f(\xi))\big)\Big) \\ &= \sum_{\xi\in\mathrm{zero}(f^n)} \Big(16{f^{n-1}}'(f(\xi))^2(f(\xi) - c) \\ &\qquad + 24{f^{n-1}}'(f(\xi)){f^{n-1}}''(f(\xi))(f(\xi) - c)^2\Big)\end{aligned}$$

Så skifter jeg til at summere over $\mathrm{zero}(f^{n-1})$, og derefter stryges alle de led, der er ulige funktioner af ξ.

$$\begin{aligned}
\Delta_n &= 16 \sum_{\xi\in\mathrm{zero}(f^{n-1})} \Big(2f^{n-1\prime}(\xi)^2(\xi-c) + 3f^{n-1\prime}(\xi)f^{n-1\prime\prime}(\xi)(\xi^2-2c\xi+c^2)\Big) \\
&= -32c \sum_{\xi\in\mathrm{zero}(f^{n-1})} \Big(f^{n-1\prime}(\xi)^2 + 3\xi f^{n-1\prime}(\xi)f^{n-1\prime\prime}(\xi)\Big) \\
&= -32c\,\Delta_{n-1}
\end{aligned}$$

Og så kan man ved induktion vise, at $\Delta_n = (-32c)^n$, hvilket giver sumreglen $T_{(-4)} = 16^n + (-32c)^n$.

3.3 Regel nr. 5

Jeg vil nu udlede $T_{(-5)}$, da jeg lige har udlet $T_{(-3)}$ og $T_{(-4)}$, vil jeg springe meget hurtigt hen over de dele af bevistet, der er magen til del af disse beviser, der er dog en stadig noget at vise, da $T_{(-5)}$ er betydelig mere besværlig, end de tidligere sumregler. Jeg starter med rækkeudviklingen som jeg plejer, og denne gang indeholder rækkeudviklingen to integraler, der ikke er beregnet på forhånd.

$$T_{(-5)} = \oint \frac{dx}{2\pi i}\frac{f^{n\prime}(x)^5}{f(x)} + \oint \frac{dx}{2\pi i}\frac{x^2 f^{n\prime}(x)^5}{f(x)^3} + 32^n$$

Det kan betale sig at beregne integralerne et ad gangen, jeg starter med det første, som jeg kalder A_n.

$$\begin{aligned}
A_n &\equiv \oint \frac{dx}{2\pi i}\frac{f^{n\prime}(x)^5}{f(x)} \\
&= \sum_{\xi\in\mathrm{zero}(f^n)} f^{n\prime}(\xi)^4 \\
&= 32 \sum_{\xi\in\mathrm{zero}(f^{n-1})} \Big(c^2 f^{n-1\prime}(\xi)^4 + \xi^2 f^{n-1\prime}(\xi)^4\Big) \\
&= 32(c^2 A_{n-1} + B_{n-1}) \\
B_n &\equiv \sum_{\xi\in\mathrm{zero}(f^n)} \xi^2 f^{n\prime}(\xi)^4 \\
&= 32 \sum_{\xi\in\mathrm{zero}(f^{n-1})} \Big(-c^3 f^{n-1\prime}(\xi)^4 - 3c\xi^2 f^{n-1\prime}(\xi)^4\Big) \\
&= 32(-c^3 A_{n-1} - 3cB_{n-1})
\end{aligned}$$

Her opdagede jeg halvvejs inde i beregningen at der dukkede et led op jeg ikke kunne omskrive til A_{n-1}, så jeg kaldte det for B_{n-1}, og udførte samme type beregning en gang til, bare på B_n. Heldigvis viser det sig at der ikke optræder flere led end A_n og B_n, så det er stadig muligt at finde A_n ved at løse en rekursionsligning. Men, det er ikke en pæn løsning man får, idet egenværdierne for rekursionsmatricen er

$$32\,\frac{c(c-3) \pm \sqrt{c^2+2c+9}}{2}.$$

Ved udregningen af det andet integrale sker der det samme, men heldigvis viser det sig at man får de samme egenværdier,

$$C_n \equiv \sum_{\xi\in\mathrm{zero}(f^n)} \Big(2f^{n\prime}(\xi)^2 + 14\xi f^{n\prime}(\xi)f^{n\prime\prime}(\xi) + 8\xi^2 f^{n\prime\prime}(\xi)^2$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad\qquad +4\xi^2 f^{n\prime}(\xi) f^{n\prime\prime\prime}(\xi)\Big) \\
&= 32(-3C_{n-1} - c^3 D_{n-1}) \\
D_n &\equiv \sum_{\xi\in\mathrm{zero}(f^n)} \left(8 f^{n\prime\prime}(\xi)^2 + 4 f^{n\prime}(\xi) f^{n\prime\prime\prime}(\xi)\right) \\
&= 32(C_{n-1} + c^2 D_{n-1}).
\end{aligned}
$$

Det kan stadig ikke betale sig at løse rekursionsligningen ved hjælp af egensøjler og egenværdier, men ved kigge på de to fixpunkter for $f(x)$ kan man beregne $A_1 = 32c^2$, $B_1 = -32c^3$, $C_1 = -96c$ og $D_1 = 32$. Disse tal kan benytte til at finde $A_0 = C_0 = 1$ og $B_0 = D_0 = 0$, og i sidste ende finder man frem til denne smukke formel for $T_{(-5)}$,

$$
\begin{pmatrix} T_{(-5)} \\ * \end{pmatrix} = 32^n \left(\mathbf{1} + \begin{pmatrix} c^2 & 1 \\ -c^3 & -3c \end{pmatrix}^n + \begin{pmatrix} -3c & -c^3 \\ 1 & c^2 \end{pmatrix}^n \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{10}
$$

(Predrag + Kim's addition, 11 May 95:)
Define

$$
\mathbf{B} := \begin{pmatrix} c^2 & 1 \\ -c^3 & -3c \end{pmatrix} , \qquad \mathbf{S} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \tag{11}
$$

and rewrite (10) as

$$
T^{(n)}_{(-5)} = 32^n \, (1,0) \, (\mathbf{1} + \mathbf{B}^n + \mathbf{S}\mathbf{B}^n\mathbf{S}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{12}
$$

As the upper-left element of $\mathbf{B}^n + \mathbf{S}\mathbf{B}^n\mathbf{S}$ is the trace $\mathbf{B}^n$, (12) yields

$$
T^{(n)}_{(-5)} = 32^n \left(1 + \mathrm{Tr}\, \mathbf{B}^n\right) . \tag{13}
$$

the Fredholm determinant (17) follows

$$
\begin{aligned}
F_{(-5)}(z) &= \exp\left(- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} T^{(n)}_{(-5)} \right) \\
&= (1 - 32z) \det(1 - 32z\mathbf{B}) \\
&= (1 - 32z) \left(1 - c(c-3)32z - 2c^3(32z)^2\right) .
\end{aligned} \tag{14}
$$

and the zeta function

$$
\zeta_{(-5)} = \frac{(1-16z)(1+32cz)}{(1-32z)\,(1-(c-3)32cz - 2c^3(32z)^2)} , \tag{15}
$$

in agreement with the conjecture

$$
\zeta_4 = \frac{(1-z)(1+2cz)}{(1-2z)(1-2(c-3)cz - 8c^3z^2)} \tag{16}
$$

in ref. [2]. Now with little Mathematica one can get spews of these zeta functions; on has to prove that they come in (odd,even n) pairs, and for each one establish the recursion relations, presumably a matrix of order $[n/2]$; its determinant gives the Fredholm. Be-a-u-utiful, and probably can be much prettier still.

Another more obscure remark; these sum rules look very much like the recursion relations for the Farey map partition functions derived by A.D. Kennedy and myself, Appendix B, Table II of ref. [5].
(end of Predrag's addition of 10 May 95.)

4 Fredholm determinanter og zeta funktioner

For at kunne sammeligne mine resultater med resultater andre har fået beregner jeg Fredholm determinanter,

$$F_{(k)}(z) = \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} T_{(k)}^n\right), \tag{17}$$

og ud fra dem finder jeg så zeta funktioner,

$$\zeta_{(k)} = F_{(k+1)}/F_{(k)}$$

som jeg kan sammeligne med de zeta funktioner de har fundet i [2]. De har dog brugt en anden nummerering af deres zeta funktioner, så deres ζ_1 svarer til min $\zeta_{(-2)}$, deres ζ_2 til min $\zeta_{(-3)}$, osv. De har også brugt en anden sum, så derfor skal man gange z med 2^k for at oversætte deres ζ_k til en af mine zeta funktioner. Med dette i hukommelsen vil jeg nu beregne zeta funktionerne ud fra mine resultater.

De første 4 zeta funktioner er beregnet i [1], så jeg udregner kun den 5, dvs. $\zeta_{(-4)}$. Til dette skal jeg bruge Fredholm determinanterne $F_{(-3)}$ og $F_{(-4)}$, men da $F_{(-3)}$ også er beregnet i [1], vil jeg kun udlede formelen for $F_{(-4)}$.

$$F_{(-4)} = \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}\left(16^n + (-32c)^n\right)\right)$$

Ved at dele summen op i to dele, en med 16^n, og en med $(-32c)^n$, kan man samle z^n og det andet led under potensen, hvilket giver Taylorrækken for $-\log(1-\alpha z)$, og efter at logaritme funktionen går ud med exponential funktionen, er der $F_{(-4)} = (1-16z)(1+32cz)$ tilbage. Det giver zeta funktionen

$$\zeta_{(-4)} = \frac{(1-8z)(1+8cz)}{(1-16z)(1+32cz)},$$

hvilket er i overenstemmelse med $\zeta_3 = \frac{(1-z)(1+cz)}{(1-2z)(1+4cz)}$ i [2].

Jeg har også prøvet at omskrive $T_{(-5)}$ til Fredholm determinant, hvilket kan lade sig gøre ved at finde egenværdier og diagonalisere sumformelen (10), men mit mål var at beholde matrixligningen under omskrivningen, både fordi den minder mere om de andre sumformler jeg har udledt, og fordi det sandsynligvis vil være mere simpelt på den måde, idet man undgår kvadratrødder i beregningerne. Men det lykkedes desværre ikke.

5 Nummerisk test

For at være sikker på at sumreglerne passer (dvs. at jeg har regnet rigtigt), har jeg testet dem nummerisk på computer. Jeg har testet sumreglerne for $f(x) = x^2 + c$, ved at finde alle periodiske punkter af periode n, og med dem beregnet alle led i sumreglen. Da mit program kun kan regne med reelle tal, har jeg kun kunnet testet reglerne for $-c > 2$, for i dette tilfælde, er alle de periodiske punkter for f reelle.

En anden grund til at vælge $-c > 2$ er, at så er det nemt at finde de periodiske punkter, fordi de allesammen er ustabile, og derfor stabile ved den inverse afbildning.

Med *den* inverse afbildning, mener jeg den for et hvert fixpunkt $x_{\epsilon_1\epsilon_2\cdots\epsilon_n}$, $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n \in \{-1, 1\}$, for f^n entydigt bestemte inverse afbildning $f_{\epsilon_1}^{-1}(f_{\epsilon_2}^{-1}(\cdots(f_{\epsilon_n}^{-1}(x))))$, hvor $f_\epsilon^{-1} = \epsilon\sqrt{x-c}$, som $x_{\epsilon_1\epsilon_2\cdots\epsilon_n}$ er fixpunkt for. Da fixpunkterne er tiltrækkende ved deres inverse afbildning kan man finde dem ved at itterere denne, og ved at gøre dette for alle de inverse afbildninger, kan man finde alle fixpunkterne.

Jeg har testet alle de regler jeg har udledt, for periodiske punkter af op til 12. orden, og for forskellige værdier af $-c$ i intervallet 2 til 40, og fundet at de passer. Det viste sig dog at reglerne $T_{(-2)}$ og $T_{(-4)}$ ikke passede med de tal mit program gav for $-c = 100$ og $n \geq 10$, men det må skyldes afrundingsfejl i de nummeriske beregninger. De andre regler passede med 10 cifres nøjagtighed, hvilket for $T_{(-1)}$ og $T_{(-3)}$ kunne skyldes at de indeholder et ulige led i tælleren, og afrundingsfejlene derfor går ud mod hinanden, mens de i $T_{(-2)}$ og $T_{(-4)}$ summere op til noget stort.

Et eksempel på nogle tal fra mine beregninger, hvor man kan se at reglerne passer, kan ses i tabel 1, de er beregnet med 15 cifres præcision på fixpunkterne og 20 cifres præcision i beregningerne.

Tabel 1: Sumregler beregnet for $f(x) = x^2 - 4.321$

	$n = 1$	$n = 5$	$n = 12$
$T_{(0)}$	$2.84332019734 \cdot 10^{-17}$	$1.12470093527 \cdot 10^{-19}$	$2.63255214843 \cdot 10^{-17}$
$T_{(-1)}$	2.00000000000	$3.20000000000 \cdot 10^{1}$	$4.09600000000 \cdot 10^{3}$
$T_{(-2)}$	4.00000000000	$1.02400000000 \cdot 10^{3}$	$1.67772160033 \cdot 10^{7}$
$T_{(-3)}$	$4.25680000000 \cdot 10^{1}$	$4.93923265057 \cdot 10^{7}$	$2.91132741422 \cdot 10^{18}$
$T_{(-4)}$	$1.54272000000 \cdot 10^{2}$	$5.05452364858 \cdot 10^{10}$	$4.88439677256 \cdot 10^{25}$
$T_{(-5)}$	$1.04428931200 \cdot 10^{3}$	$3.44181786338 \cdot 10^{14}$	$7.71268591243 \cdot 10^{34}$

6 Konklusion

Jeg har i projektet fundet en række sumregler, og det jeg har gjort kan gentages for sumregler af højere orden, men det var allerede meget besværligt for $T_{(-5)}$, og det bliver ikke lettere. Jeg har under projektet stødt på tre problemer som det kunne være interessant at løse. For det første, om alle sumreglerne ser ud som (10), dvs. som en sum af nogle matricer opløftet i n, multipliceret på en enhedssøjle. For det andet hvad det led det står under $T_{(-5)}$ i (10) udtrykker, og for det tredie, hvordan man omskriver en sumformel på matrixform til en Fredholm determinant, uden først at skulle finde egenværdier.

Tak. Jeg vil gerne takke min vejleder Predrag Cvitanović for et spændende projekt og god vejledning.

Litteratur

[1] P. Cvitanović, G. Vattay, *Sum rules for periodic orbit theory*, NBI, preprint (Sept. 1994).

[2] S. Hatjispyros, F. Vivaldi, "A family of rational zeta functions for the quadratic map", *Nonlinearity* (to be published).

[3] C. Berg, *Matematik 2 MA, Matematisk Analyse, 1993–94, Kapitel III. Kompleks funktionsteori*, Københavns Universitet, Matematisk Institut, København, 1993.

[4] P. Cvitanović, et al, *Classical and Quantum Chaos: A Cyclist Treatise*, `http://www.nbi.dk/~predrag/QCcourse/`, NBI, København, 1995.

[5] R. Artuso, P. Cvitanović and B.G. Kenny, *Phys. Rev.* **A39**, 268 (1989).